تحليل (2) نظري

المحاضرة النظرية العاشرة

* التكامل المعتل من النوع الأول :

تعريف : بفرض أن الدالة $f(x)$ معرفة على المجال $[a, \infty[$ وقابلة للمكاملة محلياً على هذا المجال ، أي أن الدالة $f(x)$ قابلة للمكاملة على أي مجال جزئي مغلق ومحدود محتوى في المجال $[a, +\infty[$

إذا كانت النهاية الآتية

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx \quad (1)$$

موجودة ومحدودة ووحيدة فإننا نقول بأن هذا التكامل المعتل من النوع الأول إنه متقارب أو معرف أو موجود ومحدود ونكتب

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx \quad (2)$$

مثال : ادرس تقارب أو تباعد التكاملين الآتيين

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \quad ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

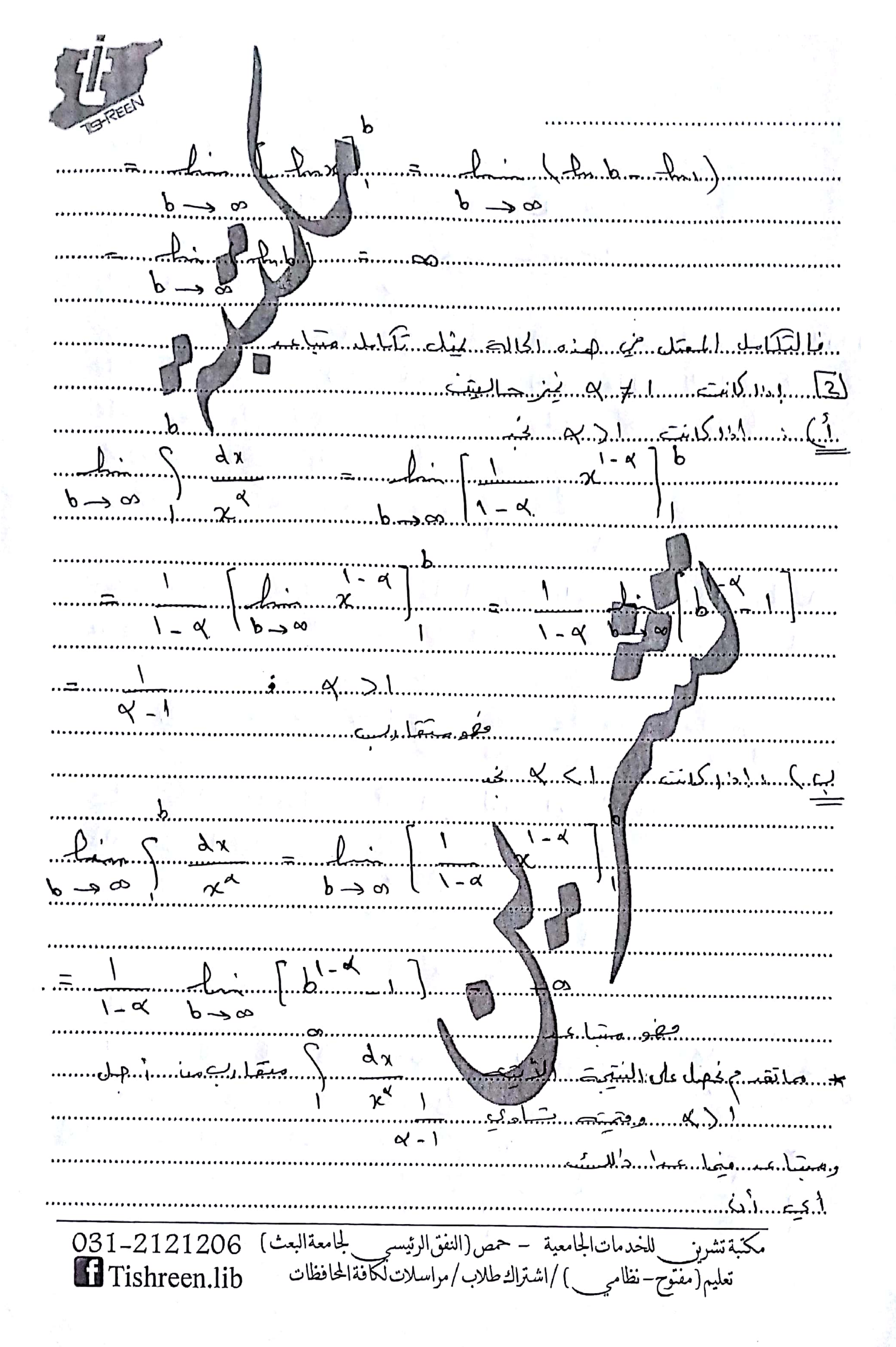
الحل :

بالنسبة للتكامل I_1 يعتبر من النوع الأول لدينا $\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x}$

لإيجاد هذه النهاية نميز الحالات الآتية

[1] : إذا كان $\alpha = 1$ فإن

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x}$$



$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln x\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(\ln b - \ln 1\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$$

فالتكامل المعتل في هذه الحالة يكون تكاملاً متباعد

2) إذا كانت $\alpha \neq 1$ نميز حالتين

أ) إذا كانت $\alpha > 1$ نجد

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_1^b$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left[\lim_{b\to\infty} x^{1-\alpha}\right]_1^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to\infty} \left[b^{1-\alpha} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha-1} \quad ; \quad \alpha > 1$$

فهو متقارب

ب) إذا كانت $\alpha < 1$ نجد

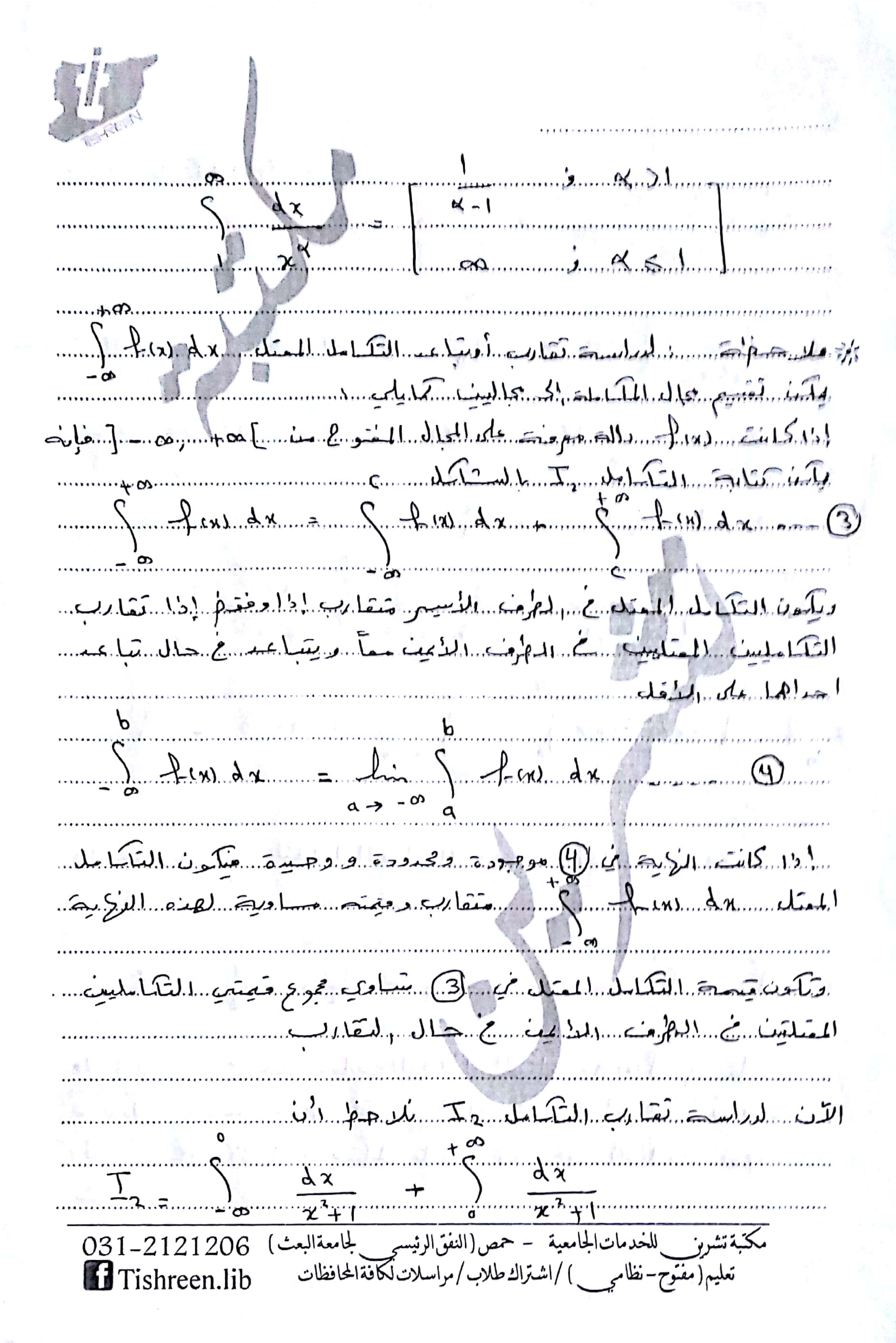
$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_1^b$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to\infty} \left[b^{1-\alpha} - 1\right] = \infty$$

فهو متباعد

* مما تقدم نحصل على النتيجة الآتية: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ متقارب من أجل $\alpha > 1$ وقيمته تساوي $\frac{1}{\alpha-1}$ ومتباعد فيما عدا ذلك

أي أن



$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & ، \alpha>1 \\ \infty & ، \alpha \le 1 \end{cases}$$

* ملاحظة: لدراسة تقارب أو تباعد التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ يمكننا تقسيم مجال التكامل إلى مجالين كما يلي:

إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على المجال المفتوح $]-\infty , +\infty[$ فإنه يمكننا كتابة التكامل I_1 بالشكل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \quad ——— (3)$$

ويكون التكامل المعتل في الطرف الأيسر متقارب إذا وفقط إذا تقارب التكاملين المعتلين في الطرف الأيمن معاً ويتباعد في حال تباعد أحدهما على الأقل.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx \quad ——— (4)$$

إذا كانت النهاية في (4) موجودة ومحدودة ووحيدة فيكون التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ متقارب وقيمته مساوية لهذه النهاية.

وتكون قيمة التكامل المعتل في (3) تساوي مجموع قيمتي التكاملين المعتلين في الطرف الأيمن في حال التقارب.

الآن لدراسة تقارب التكامل I_2 نلاحظ أن

$$I_2 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

ندرس كل تكامل على حدا

$$I_2' = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \Big[\arctan x\Big]_a^0 = \arctan(0) - \lim_{a \to -\infty} \arctan(a)$$

$$= 0 - \lim_{a \to -\infty} \arctan(a) = 0 - \arctan(-\infty)$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$I_2'' = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+1}$$

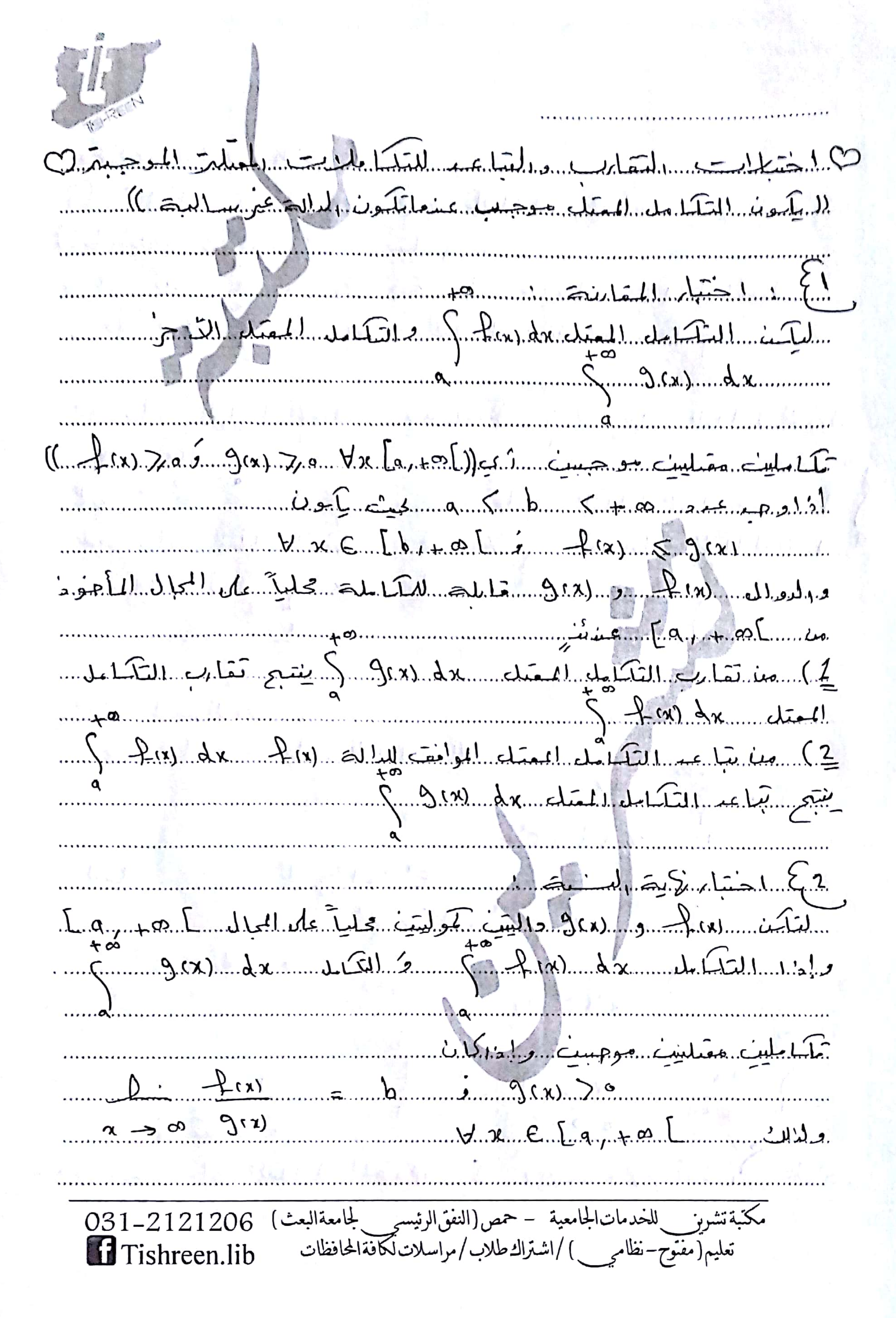
$$= \lim_{b \to +\infty} \Big[\arctan x\Big]_0^b = \Big[\lim_{b \to +\infty} \arctan b - 0\Big]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

مما سبق نجد أن التكامل المعتل المعطى متقارب وقيمته تساوي

$$I_2 = I_2' + I_2'' = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

ملاحظة: في حال تقارب التكامل المعتل $\int^{+\infty} f(x)\,dx$ فإن قيمته لا تتعلق باختيار نقطة التقسيم (مثلاً c) واختيار نقطة التقسيم يجب أن يكون بشكل مناسب أي يجب ألا تكون نقطة شاذة



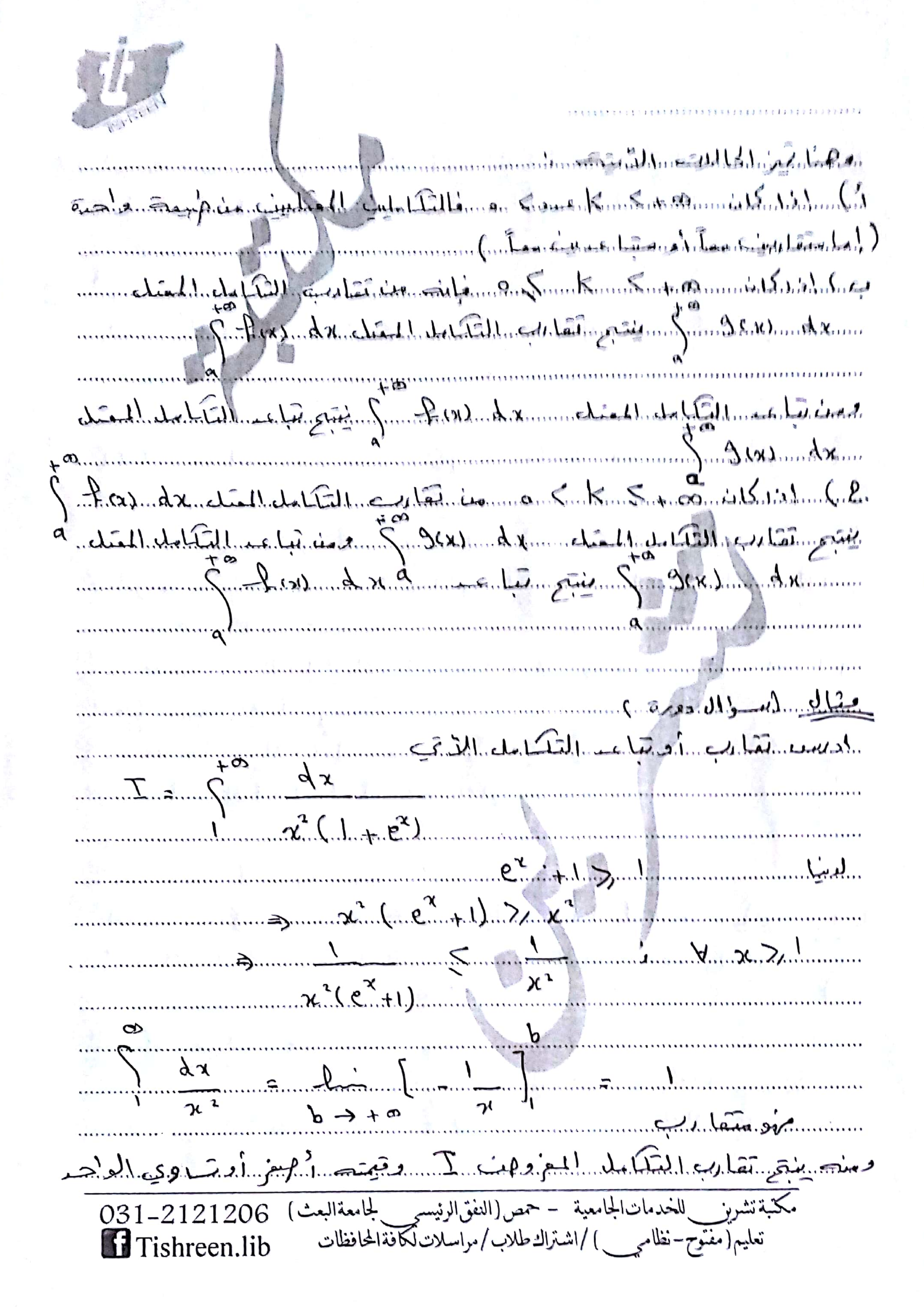
♡ اختبارات التقارب والتباعد للتكاملات المعتلة الموجبة ♡
((يكون التكامل المعتل موجب عندما تكون الدالة غير سالبة))

ع1 : اختبار المقارنة :
ليكن التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ والتكامل المعتل الآخر $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

تكاملين معتلين موجبين أي (($f(x) \geq 0$ و $g(x) \geq 0$ $\forall x\, [a, +\infty[$))
إذا وجد عدد $a < b < +\infty$ بحيث يكون
$f(x) \leq g(x)$ ، $\forall\, x \in [b, +\infty[$
والدوال $f(x)$ و $g(x)$ قابلة للتكاملة محلياً على المجال المأخوذ من $[a, +\infty[$ عندئذٍ
1) من تقارب التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ ينتج تقارب التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$
2) من تباعد التكامل المعتل الموافق للدالة $f(x)$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ينتج تباعد التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

ع2 اختبار نهاية النسبة :
لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين تكامليتين محلياً على المجال $[a, +\infty[$
وإذا التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ و التكامل $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

تكاملين معتلين موجبين وإذا كان
$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = b$ ، $g(x) > 0$
وذلك $\forall x \in [a, +\infty[$



ومما يميز الحالات الثلاث :

أ) إذا كانت $0 < K < +\infty$ فالتكاملان المعتلان من نوعية واحدة (إما متقاربان معاً أو متباعدان معاً)

ب) إذا كانت $0 \le K < +\infty$ فإنه من تقارب التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ ينتج تقارب التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

ومن تباعد التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ينتج تباعد التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

ج) إذا كانت $0 < K \le +\infty$ من تقارب التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ينتج تقارب التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ ومن تباعد التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ ينتج تباعد $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

مثال (سؤال دورة)

ادرس تقارب أو تباعد التكامل الآتي

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

لدينا $e^x + 1 \geq 1$

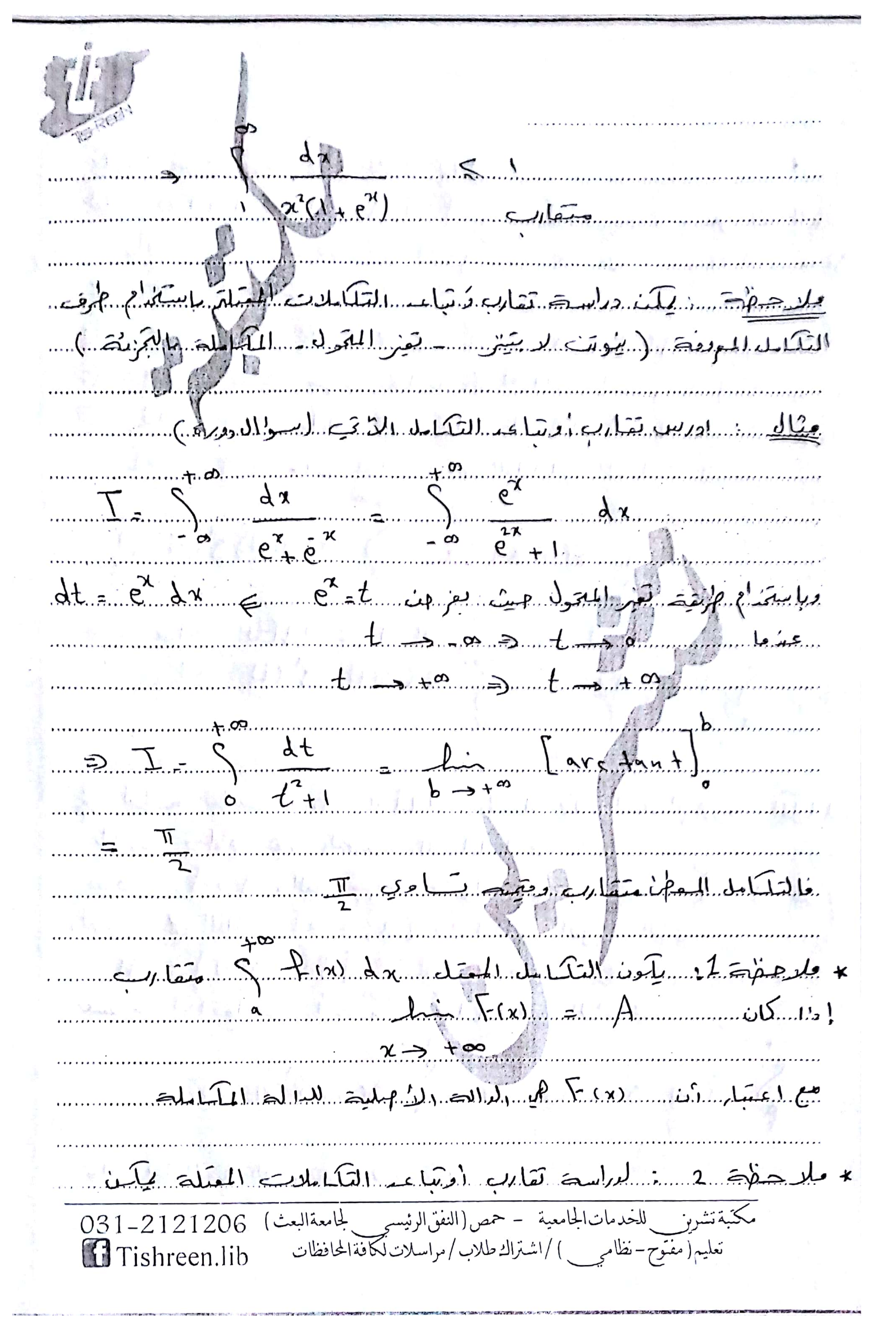
$$\Rightarrow x^2(e^x+1) \geq x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2(e^x+1)} \leq \frac{1}{x^2} \quad ; \quad \forall x \geq 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = 1$$

فهو متقارب

ومنه ينتج تقارب التكامل المعزول I وقيمته أصغر أو تساوي الواحد



$\rightarrow \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)} \leq 1$

متقارب

ملاحظة: يمكن دراسة تقارب وتباعد التكاملات المعتلة باستخدام طرق التكامل المعروفة (نيوتن لايبنتز - تغير المتحول - المكاملة بالتجزئة)

مثال: ادرس تقارب أو تباعد التكامل الآتي (سؤال دورة)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$$

وباستخدام طريقة تغير المتحول حيث نفرض $e^x = t \Rightarrow dt = e^x dx$

عندما $t \to -\infty \Rightarrow t \to 0$

$t \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$

$$\Rightarrow I = \int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{b \to +\infty} [\arctan t]_0^b$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

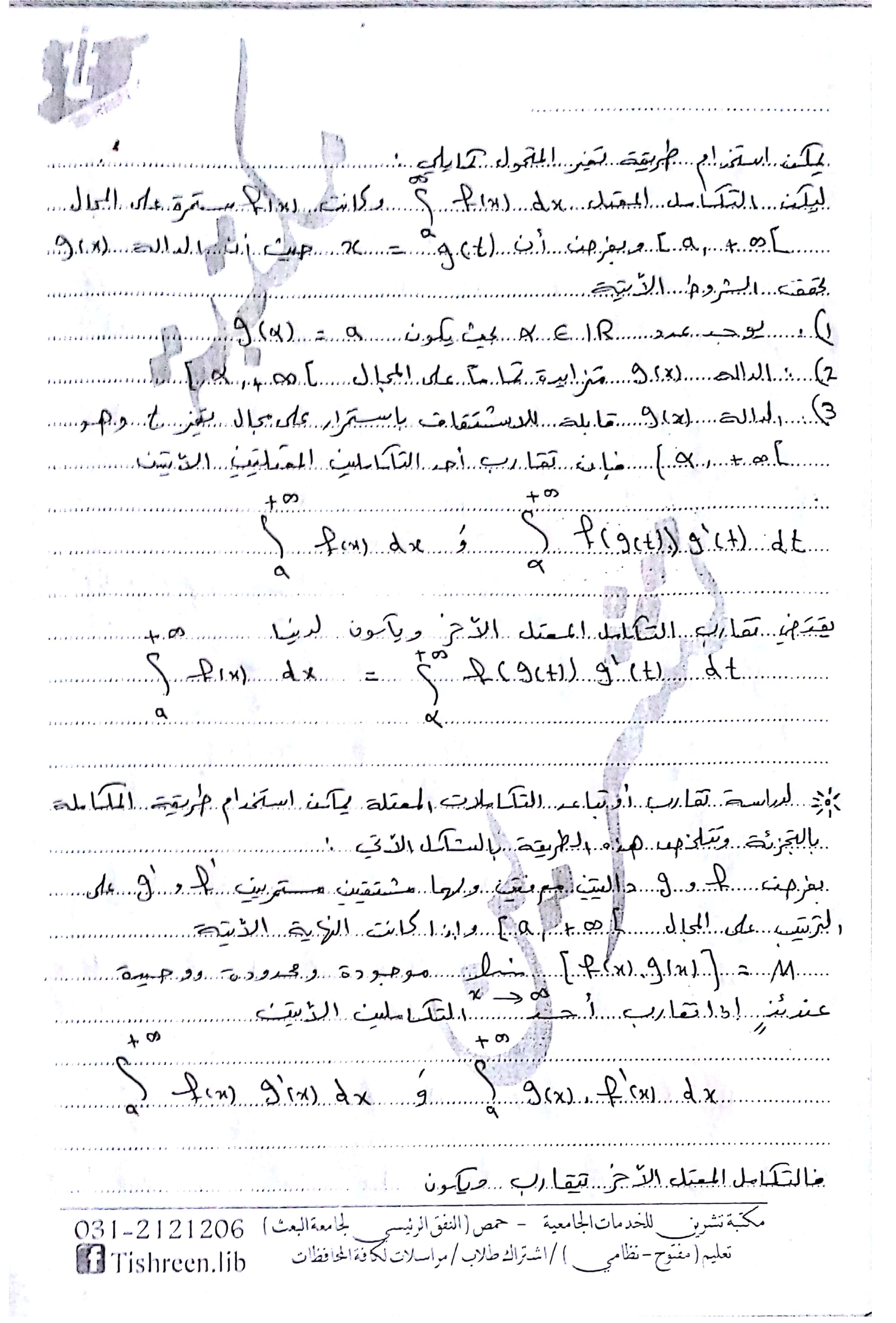
فالتكامل المعطى متقارب وقيمته تساوي $\frac{\pi}{2}$

* ملاحظة 1: يكون التكامل المعتل $\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$ متقارب

إذا كان $\lim_{x \to +\infty} F(x) = A$

مع اعتبار أن $F(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة المكاملة

* ملاحظة 2: لدراسة تقارب أو تباعد التكاملات المعتلة يمكن



يمكن استخدام طريقة تغيير المتحول كما يلي :

ليكن التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ وكانت $f(x)$ مستمرة على المجال $[a,+\infty[$ ولنفرض أن $x = g(t)$ حيث إن الدالة $g(x)$ تحقق الشروط الآتية

1) يوجد عدد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث يكون $g(\alpha) = a$

2) الدالة $g(x)$ متزايدة تماماً على المجال $[\alpha,+\infty[$

3) الدالة $g(x)$ قابلة للاشتقاق باستمرار على مجال تغير t و.م.و $[\alpha,+\infty[$ فإن تقارب أحد التكاملين المعتلين الآتيين :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad , \quad \int_\alpha^{+\infty} f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

يقتضي تقارب التكامل المعتل الآخر ويكون لدينا

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^{+\infty} f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

☼ لدراسة تقارب أو تباعد التكاملات المعتلة يمكن استخدام طريقة المكاملة بالتجزئة وتلخص هذه الطريقة بالشكل الآتي :

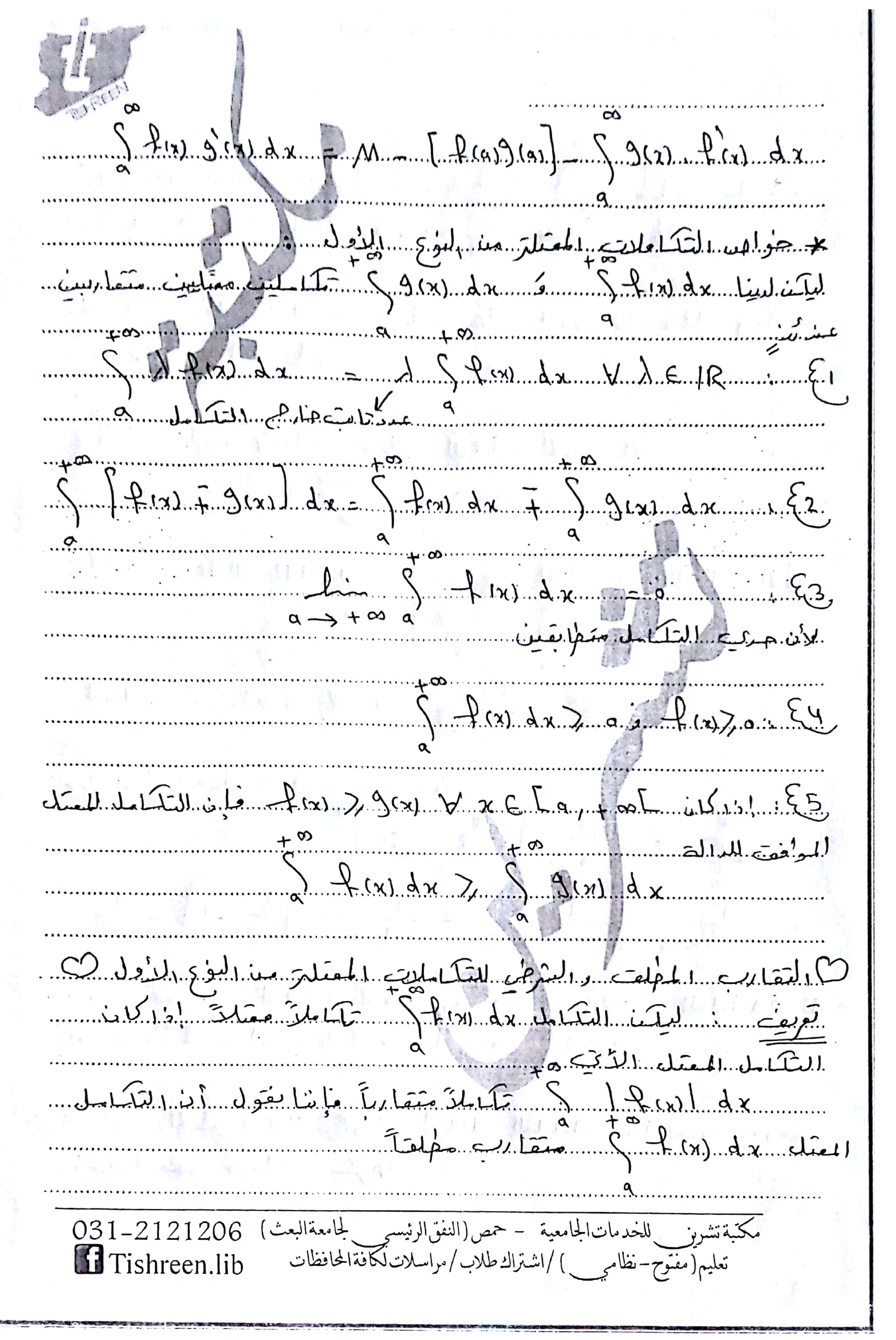
بفرض f و g دالتين حقيقتين ولهما مشتقتين مستمرتين f' و g' على الترتيب على المجال $[a,+\infty[$ وإذا كانت النهاية الآتية

$\lim_{x\to\infty}[f(x).g(x)] = M$ موجودة ومحدودة ووحيدة

عندئذٍ إذا تقارب أحد التكاملين الآتيين

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g'(x)\,dx \quad , \quad \int_a^{+\infty} g(x).f'(x)\,dx$$

فالتكامل المعتل الآخر يتقارب ويكون



$$\int_a^{\infty} f(x)\, g'(x)\, dx = M - [f(a)g(a)] - \int_a^{\infty} g(x)\, f'(x)\, dx$$

* خواص التكاملات المعتلة من النوع الأول:

ليكن لدينا $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ و $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ تكاملين معتلين متقاربين عندئذٍ:

ع1: $\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

عدد ثابت خارج التكامل

ع2: $\int_a^{+\infty} [f(x) \mp g(x)]\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \mp \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

ع3: $\lim_{a \to +\infty} \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = 0$

لأن حدي التكامل متطابقين

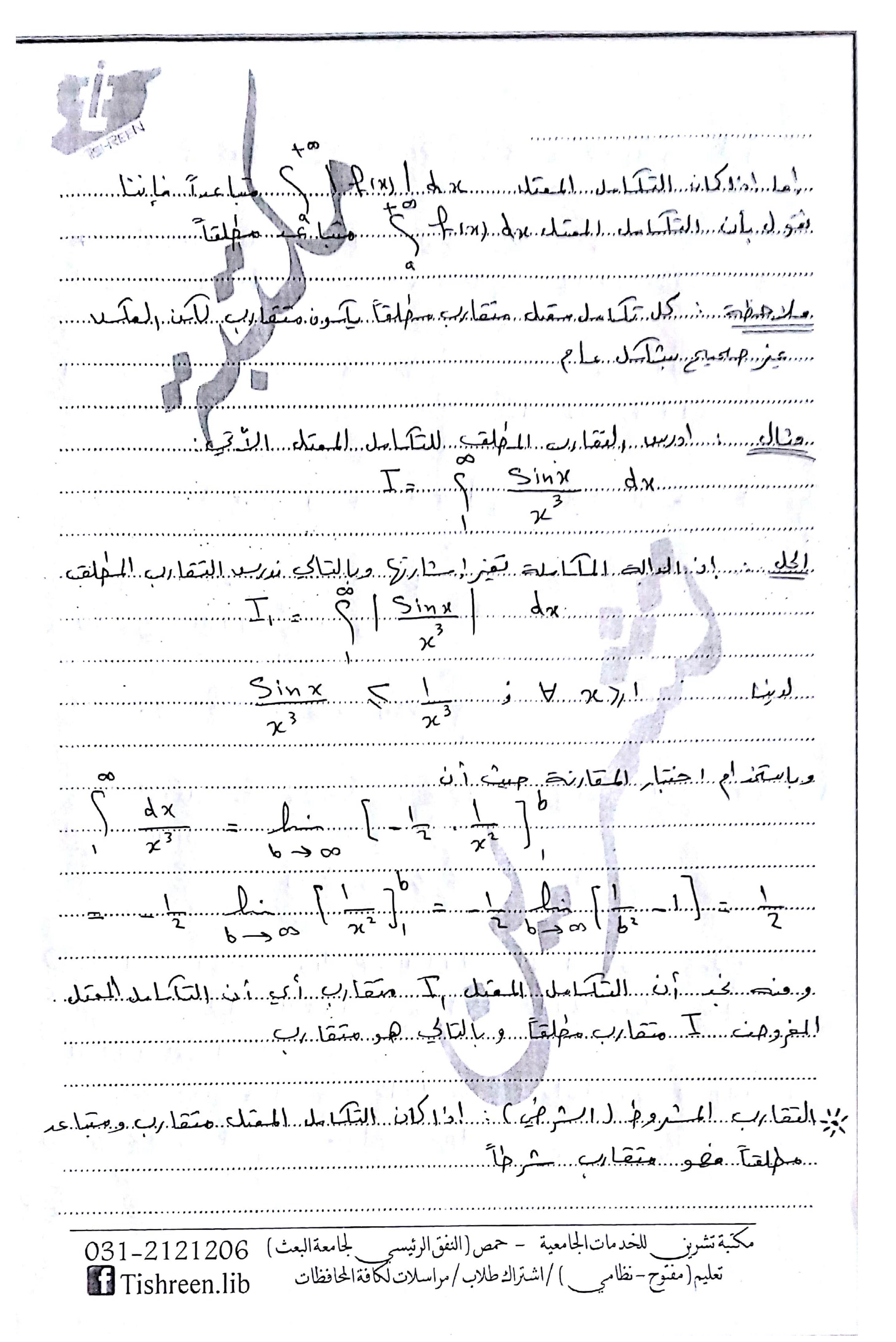
ع4: $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \geq 0$

ع5: إذا كان $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty[$ فإن التكامل المعتل الموافق للدالة

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \geq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

♡ التقارب المطلق والشرطي للتكاملات المعتلة من النوع الأول ♡

تعريف: ليكن التكامل $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ تكاملاً معتلاً. إذا كان التكامل المعتل الآتي $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ تكاملاً متقارباً فإننا نقول أن التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ متقارب مطلقاً.



أما إذا كان التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ متباعداً فإننا نقول بأن التكامل المعتل $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ متباعد مطلقاً

ملاحظة: كل تكامل معتل متقارب مطلقاً يكون متقارب لكن العكس غير صحيح بشكل عام

مثال: ادرس التقارب المطلق للتكامل المعتل الآتي:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$$

الحل: إن الدالة المكاملة تغير إشارتها وبالتالي ندرس التقارب المطلق

$$I_1 = \int_1^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right|\,dx$$

لدينا $\frac{\sin x}{x^3} \le \frac{1}{x^3} \; ; \; \forall x \ge 1$

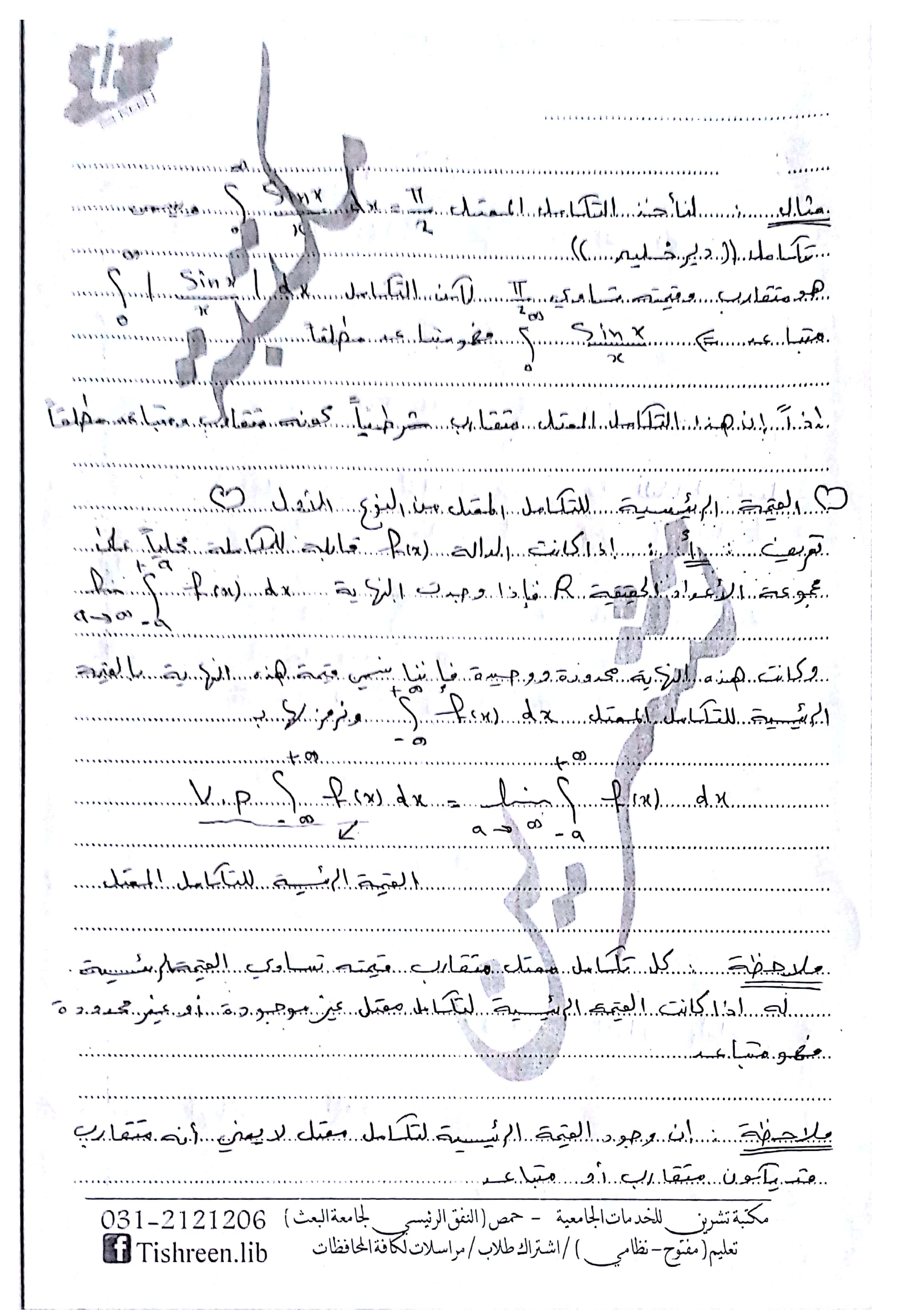
وباستخدام اختبار المقارنة حيث أن

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2}\right]_1^b$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{x^2}\right]_1^b = -\frac{1}{2} \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{b^2} - 1\right] = \frac{1}{2}$$

ونجد أن التكامل المعتل I_1 متقارب أي أن التكامل المعتل المفروض I متقارب مطلقاً وبالتالي هو متقارب

* التقارب المشروط (الشرطي): إذا كان التكامل المعتل متقارب ومتباعد مطلقاً فهو متقارب شرطياً



مثال: لنأخذ التكامل المعتل $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ هو من تكامل (ديرخليه)

هو متقارب وقيمته تساوي $\frac{\pi}{2}$ لأن التكامل $\int_{0}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$

متباعد $\Leftarrow$ $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}$ هو متباعد مطلقاً

إذاً: إن هذا التكامل المعتل متقارب شرطياً كونه متقارب ومتباعد مطلقاً

♡ القيمة الرئيسية للتكامل المعتل من النوع الأول ♡

تعريف: إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للمكاملة محلياً على مجموعة الأعداد الحقيقية R فإذا وجدت النهاية $\lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{+a} f(x)\, dx$

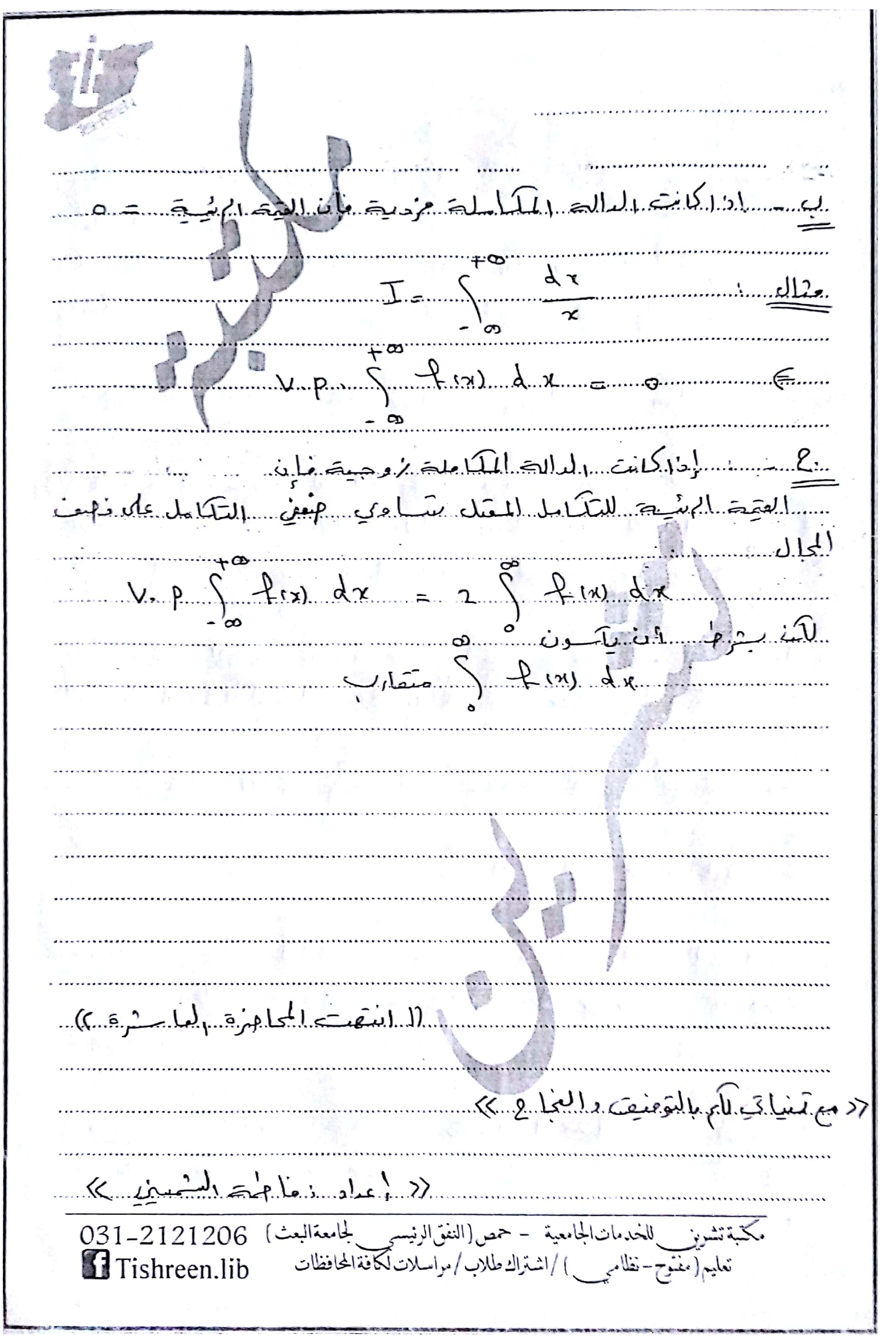
وكانت هذه النهاية محدودة وموجودة فإننا نسمي قيمة هذه النهاية بالقيمة الرئيسية للتكامل المعتل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ ونرمز لها بـ

$$V.P \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} f(x)\, dx$$

↙ القيمة الرئيسية للتكامل المعتل

ملاحظة: كل تكامل معتل متقارب قيمته تساوي القيمة الرئيسية له. إذا كانت القيمة الرئيسية لتكامل معتل غير موجودة أو غير محدودة فهو متباعد

ملاحظة: إن وجود القيمة الرئيسية لتكامل معتل لا يعني أنه متقارب قد يكون متقارب أو متباعد



ب - إذا كانت الدالة المكاملة فردية فإن القيمة الرئيسية = ٠

مثال:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0 \in$$

ج - إذا كانت الدالة المكاملة زوجية فإن القيمة الرئيسية للتكامل المعتل تساوي ضعفي التكامل على نصف المجال

$$V.P \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$$

لكنه بشرط أن يكون

$\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ متقارب

((انتهت المحاضرة العاشرة))

<< مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح >>

<< إعداد: فاطمة الشميسي >>